L'OPTICA GEOMÈTRICA I LA RELATIVITAT GENERAL D'EINSTEIN

En els primers mesos de l'any 1920 s'han conegut els resultats de les observacions empreses amb ocasió de l'eclipsi del 29 de maig de 1919 amb la finalitat de mesurar la petitíssima curvatura (direm *deflexió*, seguint als astrònoms anglesos) que, segons la relativitat general d'Einstein, devien experimentar els raigs de llum provinents dels estels quan passen per les proximitats del Sol.

La deflexió efectivament consignada va ésser conforme a les previsions de la teoria, constituint d'aquesta manera una prova experimental, en certa faisó més brillant encara, si no més decisiva, que la ja oferta per l'explicació de l'èxit negatiu de l'experiment de Michelson i del desplaçament secular del periheli de Mercuri. En aquests dos últims casos es tractava, en efecte, de donar raó de fenòmens ja observats (per més que fossin inútilment investigats a la llum dels ordinaris principis de la mecànica), mentre que la deflexió dels raigs és un fet nou, primerament anunciat per la teoria i després comprovat per l'experiència. Tal volta per aquesta raó l'interès suscitat entre els entesos pel memorable descobriment d'Einstein[1]

1. És convenient fer notar que Einstein va trobar la necessària base matemàtica per a la seva relativitat general en el càlcul diferencial absolut, creat i elaborat, els últims trenta anys, pel Prof. G. Ricci, de la Universitat de Pàdua. Un exemple tan conspicu d'especulacions abstractes, que ha vingut a ésser, en un moment donat, essencial al progrés de la filosofia natural, potser es troba solament en la teoria de les còniques d'Apoloni, que va fer possible el descobriment de les lleis de Kepler.

va començar a difondre's en tots els ambients científics, solament en recerca de la confirmació astronòmica de la curvatura dels raigs estelars, i tingué prompta repercussió en un públic més nombrós.

Treballs anàlegs han estat, naturalment, dedicats a aquest argument en llibres, revistes i diaris : algun, tindré ocasió d'esmentar-lo; dels altres em limito a assenyalar l'excel·lent memòria de Palatini, *Lo spostamento del perielio di Mercurio e la deviazione dei raggi luminosi* (*Nuovo Cimento*, juliol 1917, pàgs. 12-54).

I

INVOCACIONS A L'ÒPTICA GEOMÈTRICA SEGONS L'ESQUEMA CLÀSSIC

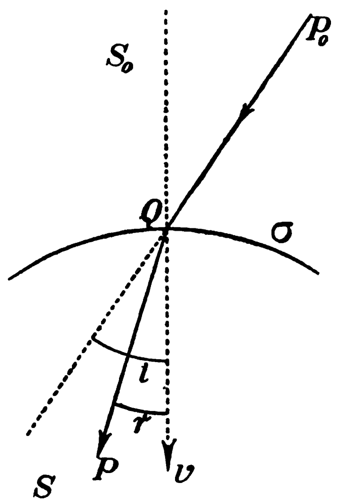
1. *Generalitats. — Lleis de la refracció. — Principi de Fermat.* — En un medi transparent, homogeni, la llum s'hi propaga evidentment en línia recta amb velocitat constant. En el cas de la isotropia, al qual exclusivament ens referirem, la velocitat és sempre la mateixa en totes les direccions, i constitueix, per això, una constant característica del medi. Per a l'aire (i així mateix sensiblement per als espais interplanetaris) aquesta constant val en xifres rodones

$$c = 3 \times 10^{10} \text{ cm. seg.}$$

o sia 300,000 km. per segon.

Si es tracta d'un medi heterogeni en el qual l'índex de refracció n, que és, demés, l'invers de la velocitat de propagació, varia de punt a punt, aleshores els raigs no tenen, en general, la marxa rectilínia, sinó que són corbs segons una llei que depèn de la manera de variar de n amb el lloc, això és de la funció $n(x, y, z)$, designant, com de costum, x, y, z les coordenades cartesianes d'un punt general del medi.

Heu's aquí per quines consideracions s'és conduït a caracteritzar la marxa dels raigs.



Es parteix del cas elemental d'un medi il·limitat que consta de dues parts S_0 i S, cadascuna homogènia (separadament considerada), però que tenen dos diversos índexs de refracció n_0, n. Sigui σ la superfície de separació entre S_0 i S. A dintre de S_0 tot raig té marxa rectilínea, i així mateix dintre de S. Per això, en passar d'un punt general P_0 de S_0 a altre punt, també general, P de S, la llum segueix un camí format de dues parts rectilínies P_0Q de P_0 a un cert punt Q (desconegut a priori) de σ; i QP. Les lleis experimentals de la refracció, a través de la superfície de separació σ, diuen, demés, que els dos segments

P_0Q, QP no estan, en general, en línia recta; no obstant, estan en un mateix pla amb la normal v a la superfície en Q, la ubiquació de Q essent tal que satisfà la coneguda llei (de Descartes)

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{n}{n_0} ,$$

en la qual i i r signifiquen els angles formats pel raig incident i pel raig refractat, respectivament, amb la normal v a la superfície σ en Q (raig i normal s'entenen orientals en el sentit de la propagació).

Ara bé : aquestes lleis geomètriques són incloses en el principi de Fermat del temps mínim. Si, en efecte, se cerca quin sigui el camí entre P_0 i P al llarg del qual la llum es propaga en el temps més breu, es veu en primer lloc, immediatament, que en cadascuna de les dues parts S_0 i S (dintre les quals la velocitat és constant) un tal camí mínim deu ésser rectilini. Així, doncs, tot es redueix a individuar la posició de Q damunt de σ, a base de la condició que resulti mínima la suma

$$t = n_0 \overline{P_0Q} + n \overline{QP}$$

dels dos temps que la llum gasta per a recórrer el segment P_0Q $\left(\text{amb la velocitat } \frac{1}{n_0}\right)$ i el segment QP $\left(\text{amb la velocitat } \frac{1}{n}\right)$. En condicions de mínim deu ésser $\delta t = 0$, i un càlcul fàcil porta de seguida a reconèixer que això implica immediatament les lleis de Descartes.[1]

1. Cfr., per exemple, APPELL : *Traité de mécanique rationnelle* (3.º ed., París, Gauthier-Villars, 1909). T. I, Cap. VII, n.º 150, pàgines 220-223.

2. ***Medi constituït per diverses capes homogènies. — Cas límit. — Fórmula de variacions a què dóna lloc el principi de Fermat.*** — Això mateix passa més generalment si el medi consta de qualsevol nombre, diem $m + 1$, de parts homogènies, estan interposades $m - 1$ capes intermèdies, entre S_0 i S, separades l'una de l'altra per superfícies successives $\sigma_1, \sigma_2, \ldots. \sigma_m$. Els índexs de refracció siguin, respectivament, les constants $n_0, n_1, n_2, \ldots n_{m-1}, n$.

Per anar de P_0 a P, un raig haurà de travessar les diverses σ en punts (a priori no coneguts) $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$. El principi de Fermat exigeix, en primer lloc, que aquest raig sigui constituït per una línia de segments rectilinis P_0Q_1, $Q_1Q_2, \ldots, Q_{m-1}Q_m, Q_mP$. La ubiquació dels punts Q serà, demés, caracterizada per la condició de fer mínima la duració total del trajecte, o sia el temps

$$t = n_0\,\overline{P_0Q_1} + n_1\,\overline{Q_1Q_2} + \ldots + n_{m-1}\,\overline{Q_{m-1}\,Q_m} + n\,\overline{Q_mP}\,.$$

També aquí es fa veure amb facilitat que per $\delta t = o$ les refraccions successives obeeixen totes a les lleis de Descartes. Per això el principi de Fermat, o també sols la part d'aquest principi que expressa les condicions diferencials necessàries per al mínimum, o sia la fórmula

$$\delta t = o,$$

apareix com una oportuna síntesi dels fets observats.

El cas més interessant d'un medi heterogeni en el qual n varia amb continuïtat de punt a punt es pot òbviament pendre com a límit de l'estratificació discreta que acabem de considerar. Basta, per un moment, imaginar, en el medi donat, un cert nombre de superfícies de la família

$$n(x, y, z) = \text{Const.}\,,$$

suficientment veïnes perquè de l'una a l'altra d'elles la n mantingui sensiblement constant. En un medi hipotètic en el qual la n fos rigorosament constant dintre de cada capa, sofrint, en canvi, bruscos salts al través de les superfícies que els separen, la marxa del raig fóra una línia poligonal recta segons el principi de Fermat. Això porta, en passar al límit quan el nombre de les capes creix indefinidament, a admetre igualment que continua essent vàlid el mateix principi també en el cas d'un índex de refracció $n(x, y, z)$ variable amb continuïtat. Ara, si indiquem amb ds l'element d'arc d'un raig general de llum propagant-se en el medi, nds representa manifestament el diferencial de temps emprat per la llum per a recorre ds, i el principi de Fermat es tradueix en el fet analític que la corba incògnita que segueix el raig lluminós entre dos punts prefixats P_0, P deu correspondre al mínim temps de recorreguda, o sia deu fer mínima la integral $\int_{P_0P} nds$. Prescindint, com abans, de les especificacions qualitatives addicionals que es requereixen per a un mínimum *effectiu*, i limitant-nos a expressar que s'anul·la la primera variació, podem inferir que ***l'òptica geomètrica d'un medi en el qual*** n(x, y, z) ***és una funció qualsevullga del lloc*** (contínua i derivable) ***roman substancialment compendiada en la fórmula de variacions;***

$$(1) \qquad \delta\int nds = o \ .$$

D'aquesta es trobarien fàcilment (amb el sols algoritme del càlcul de les variacions) les equacions diferencials (equivalents) aptes per a proporcionar, mitjançant la integració, la forma efectiva dels raigs (entre dos punts qualssevol del medi). Però és preferible, en atenció a les consideracions que em proposo desenrotllar després, fugir del càlcul directe, aprofitant-se, en canvi, d'una coneguda equivalència dinàmica.

3. *Trajectòries dinàmiques en els problemes conservatius. — Feix corresponent a un determinat valor de la constant de les forces vives. — Equacions diferencials del feix. — Principi de la mínima acció.* — Consideri's un punt material (x, y, z), el qual es mou sota l'acció d'una força conservativa. Sigui

$$U(x, y, z)$$

el potencial d'aquesta força, unitari, o sia referit a la unitat de massa del punt d'aplicació. Soposant que els eixos de referència siguin fixos (en el sentit ordinàriament atribuït en mecànica a tal qualificatiu), es té, per caracteritzar el moviment del punt, l'equació (vectorial) fonamental de la mecànica : acceleració = força unitària, o sia, projectant damunt els tres eixos:

$$(2) \qquad \ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} \,, \qquad \ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} \,, \qquad \ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \,,$$

els punts posats al damunt indiquen, segons la notació anglesa, derivació respecte del temps t.

Les equacions (2) admeten evidentment la integral (de les forces vives)

$$(3) \qquad \frac{1}{2} v^2 - U = E$$

en què $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ representa el quadrat de la velocitat del mòbil, i la constant de les forces vives E l'energia total (de moviment i de posició, o sia, actual i potencial) que li pertoca per unitat de massa.

A les (2) equivalen les anomenades ***equacions intrínseques***, que provenen de la mateixa equació vectorial ja recordada, projectant damunt de la tangent a la trajectòria, de la normal principal N i de la binormal B.

La primera es pot imaginar substituïda per la relació integral (3). Les altres dues, recordant que les components de l'acceleració segons N (cap a la concavitat de la trajectòria) i segons B valen, respectivament, $\frac{v^2}{\rho}$ (ρ radi de curvatura) i o, s'escriuen

$$(4) \qquad \frac{v^2}{\rho} = \frac{dU}{dN}, \qquad o = \frac{dU}{dB},$$

els segons membres essent evidentment derivades de direcció del potencial U segons les direccions N i B (desconegudes *a priori*).

Si es tenen en compte les (3), *es pot considerar* v^2 (introduït originàriament com quadrat de la velocitat del mòbil) *com una funció coneguda del lloc*. Per altra banda, en els segons membres de les (4) es pot també escriure, en lloc de U, U + E, o sia, $\frac{1}{2} v^2$. Amb l'accepció així atribuïda a v^2 desapareix el temps, i romanen solament elements geomètrics. En altres termes : s'obté el resultat de l'eliminació de t de les equacions del moviment, o sia les equacions diferencials que defineixen totes les possibles trajectòries, en el camp de forces derivat d'un donat potencial U(x, y, z), sota la forma

$$(4') \qquad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dN} = \frac{v^2}{\rho}, \qquad \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dB} = o,$$

essent v^2 lligada amb U per la (3), amb E constant arbitrària

Imaginem, en particular, d'atribuir a E un valor ben determinat, amb la qual cosa també v^2 roman unívocament individuat en funció del lloc. Les (4') defineixen llavors, no ja totes les trajectòries, sinó solament un *feix* llur, anomenant-se ara *feix* el conjunt de trajectòries que corresponen a un mateix valor de la constant E. Les mateixes (4') són en definitiva dues equacions diferencials de segon ordre entre x, y, z i per això llur integració introdueix quatre constants arbitràries, i un feix consta, en conseqüència, de ∞^4 trajectòries. La totalitat de les trajectòries, resultant del conjunt de tots els feixos, ve, per tant, a dependre de cinc constants : les quatre d'un feix general i la E (les quals són essencials, o sia no reduïbles a menys de cinc, exclòs solament el cas de U constant, o sia d'un camp de força nul).

Per al nostre objecte, o sia per evitar l'exposició directa del problema general de l'òptica geomètrica, subordinant la recerca dels raigs a la d'un feix de trajectòries d'un oportú problema dinàmic, és convenient recórrer, per altra banda, al principi de la mínima acció.

Aquest principi es tradueix analíticament en una equació de variacions (sense t) que per un donat valor de la constant E, compendia les equacions del corresponent feix de trajectòries. Ella expressa que s'anul·la la variació de l'acció relativa a l'arc de trajectòria comprès entre dos punts generals, essent definida l'acció com

$$\int \sqrt{2\,(\mathrm{U}+\mathrm{E})}\; ds$$

estesa a l'arc de trajectòria de què es tracta.[1]

1. APPELL : *loc. cit.*, cap. XV, n.º 220, pàgs. 543-544.

Abreviant l'escritura, usant també v^2, en lloc de la seva expressió explícita $2(U + E)$, es pot, en definitiva, retenir com equivalent a les (4') la fórmula de variacions

$$\delta \int v ds = 0 \quad . \tag{5}$$

4. *Identitat entre els raigs lluminosos i els feixos de trajectòries dinàmiques. — Subordinació d'aquests a aquells.* — La (5) (mirant v, com realment és per causa de les (3), com a funció determinada de x, y, z) difereix de la (1) solament pel canvi de n en v. *Basta, doncs, substituir* n *a* v *en les* (4') *per a tenir, sota la forma explícita*:

$$\frac{1}{2}\frac{d n^2}{dN} = \frac{n^2}{\rho} \quad , \quad \frac{1}{2}\frac{d n^2}{dB} = 0 \tag{4''}$$

les equacions diferencials dels raigs lluminosos en un medi d'índex n.

A aquest criteri d'equivalència ve bé de donar una altra forma, que serà de més fàcil ús, encara que sigui menys definidora, perquè, al revés de les (4) i (4''), comprèn encara la variable auxiliar t. Consisteix en el següent enunciat:

Els raigs lluminosos en un medi d'índex de refracció variable n(x, y, z) *constitueixen altres tantes trajectòries dinàmiques d'un punt material subjecte a una força derivada del potencial* $\frac{1}{2}$ n². *Per al problema dinàmic equivalent, la integral de les forces vives:*

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} n^2 = \text{Const.}$$

té igual a zero la constant del segon membre, amb ço que la velocitat v = n.

La justificació és clara, perquè s'obté sense altra cosa la coincidència de (4') i (4'') per $v = n$.

La regla, així formulada, és molt còmoda, consentint interessants interpretacions òptiques de resultats ja ben assolits i àdhuc familiars en la seva forma mecànica. Considerem, per exemple, el cas típic a què dóna lloc en convenients condicions a l'anomenat emmirallament de Monge[1] d'un medi en el qual l'índex de refracció n varia solament amb la cota z. Prenguem la hipòtesi (que especialment té interès físic) d'una variació lenta. En tal cas podrem admetre, com a expressió de n en funció de z,

$$n = n_0\left(1 + \frac{z}{h}\right) \quad ;$$

essent n_0 i h constants, i, demés, aquesta última (la qual és una llargaria) tal, que, en el domini dels valors de z que ocorre pendre en consideració, la relació $\frac{z}{h}$ es pot considerar com a quantitat de primer ordre. Es té llavors, menyspreant $\frac{z^2}{h^2}$ i anomenant g la constant $\frac{n_0^2}{h}$,

$$\frac{1}{2}\, n^2 = \frac{1}{2}\, n_0^2\left(1 + 2\frac{z}{h}\right) = \frac{1}{2}\, n_0^2 + gz \quad .$$

Els raigs es confonen, per tant, amb trajectòries d'un problema dinàmic en el qual el potencial $\frac{1}{2}\, n^2$ és

1. Vegeu per exemple, A. GARBASSO : *Il miraggio (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Tom. LVII, 19c6, pàgs. 1-57).

funció linear de z. Aquesta dependència lineal del potencial funció solament de z equival a dir que la força és paral·lela a l'eix z i té per valor (més adequadament per component unitària) g. Ens trobem, doncs (prescindint del divers valor numèric de g), en el cas elemental del moviment dels cossos pesats. Els raigs (quan no degeneren en rectes) seran altres tantes paràboles d'eix vertical, amb la concavitat en el sentit de la força, o sia en el sentit en què creix n. I així podríem seguir.

II

ENERGIA I MATÈRIA
COM ASPECTES DISTINTS D'UNA MATEIXA ENTITAT FÍSICA

5. *Fenòmens radioactius. — Energia intrínseca de la matèria. — Proporcionalitat entre la massa i l'energia i coeficient relatiu.* — La teoria electromagnètica de la llum ens ha habituat a considerar les vibracions lluminoses com a distintes de les oscil·lacions elèctriques en aspecte solament quantitatiu.

Una identificació encara més radical de quantitats físiques considerades fins ara com a independents (matèria i energia) ha estat suggerida, d'una manera espontània però encara tímida, pels fenòmens radioactius i s'és després vigorosament afermada com a conseqüència quasi ineluctable de les noves concepcions teòriques. Es tracta, abans de tot, de la constatació experimental que en els cossos radioactius es troba amagatzemada una descomunal quantitat d'energia. Per exemple, un gram de radi metàl·lic és capaç de desenrotllar (durant el curs de les seves transformacions) més de tres milions de calories grams. Aquesta energia, que es va desenrotllant durant el procés de desintegració del radi, i de la mateixa manera de les altres substàncies radioactives, deu necessàriament ésser continguda, en una mesura no sospitada de primer antuvi, dintre de cada àtom d'aquesta substància. Com que, per altra banda, del punt de vista químic els cossos radioactius (fora de l'alt pes atòmic) no tenen caràcters especials, apareix racional la inducció que cada àtom de qualsevol element encabeix energia en mesura igualment conspícua, vull dir del mateix ordre de magnitud. Una apreciació quantitativa va ésser suggerida, per un camí enterament diferent, per la relativitat (fins la de la primera manera), lo qual porta per la força dels fets a admetre que les masses dels cossos varien (lleuíssimament), ultra ab la velocitat, amb l'energia que porten, i precisament amb un augment $\frac{\Delta E}{c^2}$ si se'ls comunica una energia addicional ΔE.

Així s'ha obert via en la física moderna, i es pot retenir com adquirida independentment de qualsevol especial construcció teòrica, la consideració que l'energia i la matèria són necessàriament concomitants (energia = massa $\times$ c^2) i que es poden mirar com a manifestacions distintes d'una mateixa entitat, la qual apareix com a matèria ordinària quan és, com si diguéssim, prou concentrada, mentre es nota en les formes més diverses com a energia quan no hi ha nuclis de condensació.

Això constitueix, evidentment, un reconeixement d'equivalència no menys grandiós que l'afirmat pel primer principi de la Termodinàmica. Ell es precisa en la dada quantitativa que c^2 és el factor de proporcionalitat entre la mesura d'una massa i la de l'energia concomitant, i per això es designa com a *principi* o *postulat d'equivalència.* Es pot també anomenar *principi d'identificació* (entre matèria i energia), o també *de materialització de l'energia,* o, finalment, *d'inèrcia i pes* d'aquella. Aquestes últimes denominacions són justificades pel fet que, admesa la proporcionalitat entre energia i massa material, l'energia mateixa roman materialitzada, i per això dotada de les dues qualitats fonamentals que corresponen als cossos ponderables : inèrcia i pes, o sia, més generalment, aptitud per a experimentar l'acció gravitacional dels altres cossos.

6. *Conseqüències òptiques. — Curvatura dels raigs lluminosos dintre un camp de força.* — L'esquematització cinemàtica que hem recordat en el cap. I és suficient per al desenrotllament de l'Òptica geomètrica, mes no per al de l'Òptica física. L'explicació dels més complexos fenòmens d'interferència, de difracció, de polarització, etcètera, requereix notòriament una teoria que penetri quelcom més endins en l'anàlisi del fenomen. La teoria ondulatòria, que prové d'Huygens i es va afermar d'una manera definitiva amb Young i Fresnel, fou constituïda en forma satisfactòria, de primer antuvi, sota model elàstic (pres de les vibracions dels cossos sòlids); després, gràcies als treballs de Maxwell, amb model electromagnètic. Sia en aquesta teoria, avui universalment acceptada, sia en les anteriors teories elàstiques, s'identifiquen els raigs lluminosos amb les línies de fluxos de l'energia, essent la velocitat del fluxos l'experimentalment constatada per a la llum. Si s'associa a aquesta circumstància, ja fa temps adquirida, el postulat de proporcionalitat introduït en el nombre precedent, s'és necessàriament conduït a suposar que, al llarg de qualsevol raig, viatja matèria, encara que en quantitat tan petita (per causa de la petitesa del factor de proporcionalitat pel qual a un *erg* correspon amb prou feines la fracció $\frac{1}{c^2} = \frac{1}{9.10^{20}}$

de gram), que resulta inapreciable en la major part dels casos. Mes, amb tot, sempre matèria.

Aquesta recentíssima materialització de l'energia permet substituir el concepte de propagació per ones i les conseqüents explicacions dels fenòmens concrets, ja que, des del punt de vista filosòfic, concilia la teoria ondulatòria amb l'antiga teoria de l'emissió.

Mes vegem quines conseqüències específiques es dedueixen del principi de proporcionalitat, quan es posa en les condicions més oportunes perquè pugui advertir la influència de la matèria (diluidíssima i velocíssima) que recorre cada raig.

Considerem per a això un medi transparent en el qual (en absència de qualsevol acció pertorbadora) la llum s'hi propagui amb velocitat constant c. Suposem que aquest medi sigui el domini d'un camp de forces i sigui $U(x\,y\,z)$ el potencial corresponent. Un punt material lliure que es mogui en aquest camp està subjecte únicament a la força derivada del potencial U i descriu per això trajectòries que, en general, no seran rectes, sinó corbes, essent, en un punt general, el raig de curvatura lligat al valor de U (en el dit punt) i a la velocitat del mòbil (també en el dit punt), per la primera equació de les (4). Ella mostra, entre altres coses, com és evident per altra banda, per intuïció, que, *caeteris paribus*, la trajectòria és tan menys corbada com major és la velocitat. Ara bé: si és veritat que els raigs lluminosos són efectivament trajectòries de partícules materials (sia, amb tot, tan ínfimes que fins ara s'han revelat a l'experiència — a l'experiència òptica, que és la més exquisita — amb soles característiques energètiques), cada una d'aquestes partícules ha d'obeir també a les lleis dinàmiques, i, per tant, a les (3) i (4), suposant despreciables les influències mútues, o sia que cada una es comporta com un punt material lliure.

Per altra banda, les mateixes lleis han de conformar-se, almenys amb gran aproximació, als fets observats en condicions ordinàries, els quals són : velocitat c i propagació rectilínia encara dintre el camp gravitatori terrestre i solar.

7. *Apreciació numèrica sobre el camp gravitatori en el sistema solar i sobre el presumible incurvament dels raigs luminosos.* — Podrem pràcticament donar-nos compte, assenyalant també la fórmula que en segona (i més que suficient) aproximació, pot ésser substituïda a la primera de les (4) com a mesura de la curvatura local.

Comencem per això considerant l'ordre de la magnitud de U que volem identificar amb el potencial newtonià dels camps pertanyents al sistema solar. A títol d'apreciació, podem referir-lo a cossos esfèrics, homogenis, o bé estratificats segons esferes concèntriques. Si R és el radi, M la massa i f la constant d'atracció, $\frac{fM}{R}$ representa el valor del potencial propi de la superfície; valor que es evidentment el més gran dels presos per U en els punts no interiors a l'esfera potenciant, ja que ella influeix en aquests punts com si tota la massa s'hagués condensat en el centre. Demés, respecte dels diversos cossos del sistema solar, el major valor numèric de $\frac{fM}{R}$ es té evidentment pel Sol. En qualsevol cas es tracta d'una quantitat [que té les dimensions d'un potencial unitari, i per això del quadrat d'una velocitat, com per altra banda apareix per la (3)] molt petita respecte de c^2.

Calculem, en efecte, la relació $\frac{1}{c^2}\frac{fM}{R}$ pel Sol, tenint compte de $c = 3 \times 10^5$ km / seg i d'aquests altres dues dades : *a)* el radi aparent del Sol (per a un observador terrestre a la distància mitjana), val en nombre rodó (error relatiu inferior a una mil·lèssima) 16′; *b)* la velocitat (mitjana) de la Terra en el seu moviment de translació al voltant del Sol val, també en nombre rodó (amb error inferior a una centèsima) 30 km. per segon.

Designant amb Δ la distància mitja Sol-Terra, serà $\frac{R}{\Delta}$ la mesura en radiants de l'angle 16′, ja que

$$\frac{R}{\Delta} = 16 \frac{2\pi}{360 \cdot 60} = \frac{4\pi}{27 \cdot 10^2} \quad ,$$

o sia

$$\frac{\Delta}{R} = \frac{27 \cdot 10^2}{4\pi} = 214 \quad .$$

Així mateix es té, per motiu de la dada *a)*,

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{R} = \frac{\Delta}{R}\frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} = 214\frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} \quad .$$

Recordem, per altra banda, que, pel moviment en un cercle de radi Δ degut a l'atracció de la massa M situada en el centre, es té [per ex. per la primera de les (4)]

$$v^2 = \frac{fM}{\Delta} \quad .$$

Aplicant aquesta relació al moviment orbital de la Terra i tenint compte de la dada *b)*, podem escriure

$$\frac{1}{c^2}\frac{fM}{\Delta} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 10^{-8} \quad ,$$

de la qual cosa es dedueix

$$(6) \qquad \frac{1}{c^2}\frac{fM}{R} = 214 \cdot 10^{-8} = 2{,}14 \times 10^{-6}.$$

De què, com ja s'ha observat, en l'expressió del potencial U degut als cossos del sistema solar, el terme que es refereix a l'atracció del Sol pren un valor màxim en gran manera preponderant damunt els anàlegs màxims dels altres termes, es pot retenir que *en tot l'espai interplanetari, l'ordre de magnitud de* $\frac{U}{c^2}$ *és conforme a la* (6), *o sia de poques milionèsimes.*

Dintre d'aquesta aproximació, la (3) fa retrobar precisament la primera llei de l'Òptica geomètrica (velocitat de propagació $= c$). Basta, en efecte, atribuir a la constant E del segon membre el valor $\frac{1}{2}c^2$ per a tenir com expressió rigorosa de v:

$$v^2 = c^2 - 2U = c^2\left(1 - \frac{2U}{c^2}\right),$$

d'on immediatament, despreciant $\frac{2U}{c^2}$ (que puja, a lo més, a unes poques milionèsimes) al costat de la unitat,

$$v = c, \qquad q.\ v.\ d.$$

L'altra llei considerada fins ara com a fonament de l'Òptica geomètrica, és que (també dintre dels camps de forces com els que existeixen en els espais interplanetaris) els raigs tenen trajectòria rectilínia. Segons el postulat admès, les trajectòries són, en canvi, definides per les (4), en les quals va substituit v^2 pel valor (3), o sia, amb l'aproximació ara especificada, el valor constant c^2. Això consent sense més a reconèixer que, si la trajectòria no és rigorosament rectilínia, com proposa la física clàssica, se'n separa en quantitat quasi insignificant. En efecte, per la primera de les (4), en la qual s'escriu c^2 peu v^2, es té

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{c^2} \frac{dU}{dN}$$

La derivada $\frac{dU}{dN}$ representa la força del camp en la direcció N, i per això no pot ésser major que la intensitat de tal força. Tornant a pendre el cas típic del Sol, que fixa l'ordre de la magnitud, es té la màxima intensitat a la mateixa superfície, es a dir:

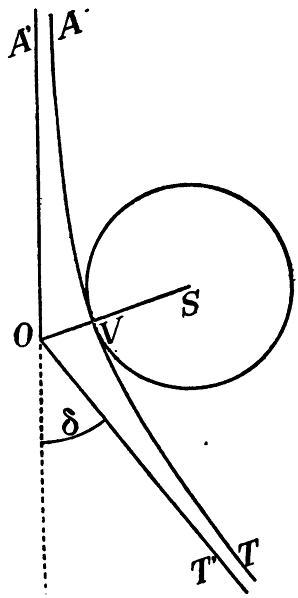
$$\left|\frac{dU}{dN}\right| \leq \frac{fM}{R^2},$$

i, conseqüentment,

$$\frac{1}{\rho} \leq \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} \frac{1}{R}.$$

Els dos primers factors del segon membre valen, per raó de la (6), la petita fracció $2{\cdot}14 \times 10^{-6}$. Resulta, doncs, que $\frac{1}{\rho}$, o sia la curvatura dels raigs per efecte del camp gravitatori, no passa d'una tal petita fracció de $\frac{1}{R}$. En altres termes, el radi de curvatura, si no és exactament infinit com per a les rectes, és, almenys, de l'ordre d'un milió de vegades el radi del Sol.

8. *Efecte angular màxim (deflexió) pels raigs arran la superficie solar.—Aplicació a un observador de la Terra.—*



La forma rigorosa dels raigs va naturalment definida per les (3), (4) amb $E = \frac{1}{2} c^2$. Es tracta, com hem advertit moltes vegades, de les equacions del moviment d'un punt material, en un camp conservatiu de potencial U. Si aquest prové d'una sola massa atraient (pensem específicament en el Sol), el problema és pròpiament el del moviment, d'un punt atret per un centre fix la integració del qual és deguda a Newton. Les trajectòries són clàssicament còniques amb el focus en el centre de forces, l'espècie de la qual depèn del signe de la constant E. Per $E > o$ (i tal és el nostre cas, en què E té el valor $\frac{1}{2}c^2$) es troba manifestament una hipèrbole. La circumstància qualitativa, ja assenyalada, que els raigs romanen molt poc corbats, encara que passin molt prop del Sol, ens fa notar que deurà de tractar-se en tot cas d'hipèrboles d'asímptotes OA', OT' quasi en línia recta (fig. 2).

Considerem en forma precisa un raig hiperbòlic que passi quasi tocant l'esfera solar en V. Sigui O el centre de la hipèrbole, S el del Sol, i, per tant, el focus de la mateixa hipèrbole. V serà el seu vèrtex, i si es designa amb a el semieix transvers, amb e l'excentricitat, tindrem per definició

$$OV = a\,, \quad OS = ae\,, \quad SV = R = a\,(e - 1)\,.$$

Per altra banda, per la geometria analítica se sap que, si es representa amb δ l'angle (extern) comprès entre les dues asímptotes,

$$tg\,\frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}\,.$$

En el cas que ens ocupa, δ deu ésser molt petit, i, per tant, e grandíssim, per raó de la fórmula que acabem de transcriure. Podrem, doncs, aproximadament, suposar la tangent igual a l'arc i $\frac{1}{e}$ despreciable comparat amb la unitat. Tenint això en compte, en lloc de

$$tg\,\frac{1}{2}\,\delta = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}\,,$$

es pot escriure

$$\delta = \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{2}{e - 1} \quad .$$

Recordant la relació $R = a(e - 1)$, resulta definitivament com a mesura de δ en funció de les dues llargàries R i a:

$$(7) \qquad \delta = \frac{2a}{R} \quad .$$

El semieix transvers a, en el moviment hiperbòlic degut a l'atracció newtoniana d'una massa M, està clàssicament relacionat amb la constant E de les forces vives per la fórmula

$$E = f \frac{M}{2a} \quad .$$

Substituint a, i posant per E el seu valor $\frac{1}{2} c^2$, la (7) es transforma en

$$(7') \qquad \delta = 2 \frac{1}{c^2} \frac{fM}{R} \quad ,$$

i d'aquesta, tenint en compte la (6), resulta:

$$\delta = 4{,}28 \cdot 10^{-6} \quad .$$

El segon membre és un nombre quebrat que expressa l'angle δ en radiants. Per tenir-lo en segons d'arc hem de multiplicar per

$$\frac{360 \times 60 \times 60}{2\pi} = 57^{\circ}\, 17'\, 45'' = 206\,265'',$$

i amb això resulta

$$\delta = 0''88 \quad . \tag{8}$$

Immediatament es reconeix que aquest angle δ expressa precisament la mesura de la *deflexió*, o sia de la màxima desviació angular de què és susceptible (amb la base del principi de proporcionalitat) un raig estelar per l'efecte gravitatori del Sol. Suposem, en efecte, que considerem un raig de llum que prové d'un astre A i arriba a un observador terrestre T, seguint un arc d'hipèrbole que passa ran de la superficie solar en V, com en la fig. 2. La direcció de la hipèrbole en T, segons la qual l'observador rep el raig de llum, es confon amb la de l'asímptota OT; la direcció segons la qual la llum ha sortit de l'astre és la de la tangent en A, que es confon pel seu cantó amb l'altra asímptota AO. *c. v. p.*

Naturalment A'O es pot identificar amb la direcció segons la qual T percep l'estrella en condicions normals, o sia quan, allunyant-se el Sol de la direcció Terra-Astre, i romanent insensible la pertorbació gravífica corresponent, el raig visual torna a ésser rectilini, ço és, separa de la trajectòria rectilínia en forma gairebé despreciable.

No serà inútil observar que si el raig visual d'una estrella, en lloc de passar ran de la superficie solar, passa a una distància $R_1 > R$ del centre del Sol, la deflexió disminueix precisament en raó inversa de la dita distància perihèlia R_1.

Basta observar que l'expressió (7) de δ segueix naturalment subsistint, per qualsevol estrella visible de la Terra, amb sols que es substitueixi en lloc de R la distància perihèlia R_1. Tindrem, doncs, en conformitat

$$\delta = \frac{2a}{R_1} = \frac{2a}{R}\,\frac{R}{R_1}\,.$$

El factor $\frac{2a}{R}$ ha estat calculat ara mateix, i així resulta, definitivament,

$$\delta = 0''88\,\frac{R}{R_1}\,.$$

I com que R correspon a 16′, basta, evidentment, que la distància angular del centre del Sol sigui de molt pocs graus, perquè δ no passi de poques centèsimes de segon i corri el perill de romandre del tot inadvertit, com si el raig fos rigorosament rectilini.

9. *Retorn al cas general d'un camp de forces qualsevol. — Equacions de variacions dels raigs lluminosos, que compendia la consideració ordinària associada al principi de proporcionalitat.* — Ja hem recordat, a l'acabament del § 6, que en un camp de forces general de potencial U, la propagació dels raigs lluminosos és regeix per les (3), (4), o sia per les mateixes equacions que convenen al moviment d'un punt material; solament (§ 7) convé especificar la constant de les forces vives E atribuint-li el valor $\frac{1}{2}c^2$. Amb això es té

$$v = \sqrt{c^2 + 2U},$$

i l'equació de variacions (5), que defineix comprensivament el feix de trajectòries coincidents amb els raigs lluminosos, s'escriu

$$\delta \int \sqrt{c^2 + 2U}\, ds = 0 \quad .$$

o, ço que és igual, dividint tots dos membres per c,

$$(9) \qquad \delta \int \sqrt{1 + \frac{2U}{c^2}}\, ds = 0 \quad .$$

III

LA RELATIVITAT GENERAL I LES SEVES CONSEQÜÈNCIES CONCRETES TOCANT A LA TRAJECTÒRIA DELS RAIGS LLUMINOSOS EN UN CAMP DE FORCES.

10. *Temps i espai en la física clàssica. — Demolició relativista de les premisses tradicionals.* — Dues són les bases de l'habitual representació geomètrica i cinemàtica dels fenòmens naturals:

1.ª L'espai en el qual semblants fenòmens es localitzen és rigorosament euclidi, és a dir, posseeix les conegudes característiques que li atribueix la intuïció directa, disciplinada i codificada per la geometria elemental.

2.ª El temps es pot concebre i (almenys en abstracte), mesurar independentment de qualsevol referència espaial; o sia, existeix un absolut temps al qual es poden imaginar referits els rellotges de tots els observatoris. És aquest el temps considerat en la llei de la inèrcia, en la constància de la velocitat c de la llum en l'èter, etc.

Ara bé : l'anomenada relativitat restringida (o de la primera classe) ha començat amb rebutjar aquesta segona base, fent veure, per raó de les mateixes modalitats físiques de mesura del temps, que dos observatoris en moviment (uniforme) l'un respecte de l'altre, poden arribar, amb idèntic procediment (canvi de senyals), a apreciar-lo en forma distinta. D'on l'oportunitat de modificar totes les imposicions conceptuals, renunciant al temps absolut i substituint-li un postulat que posa, com si diguéssim, sota el mateix patró, dos observatoris que estan en moviment (uniforme) l'un respecte de l'altre. El postulat consisteix a admetre la igualtat, per a tots dos, de la velocitat de propagació d'un mateix raig de llum, mentre, segons la cinemàtica clàssica, aquestes dues velocitats deuran diferir en la corresponent al moviment relatiu dels dos observatoris. Amb això s'estableix una relació entre la mesura del temps i la de l'espai, i es vénen a alterar els primers elements o la base de la cinemàtica. Tenint compte de les conseqüents modificacions, resta explicat de la manera més satisfactòria el resultat negatiu de l'experiment de Michelson, així com l'arrastre parcial de les ondes lluminoses en un medi en moviment, demostrat per les experiències de Fresnel; resultant, per altra banda, que, pels fenòmens ordinaris de la mecànica dels cossos ponderables (velocitats petites en comparació de c), les correccions són del tot despreciables.

Mes, revolucionant sota l'aspecte especulatiu la cinemàtica i la mecànica i amb aquestes tota la Física, la relativitat de la primera manera respectava encara, quant a la localització dels fenòmens en l'espai, els postulats de la geometria elemental. En realitat, discussions apassionades entorn de la naturalesa mètrica de l'espai ambient s'havien produït, com és ben conegut, en el segle passat, amb motiu de la geometria no euclídia, o geometria dels espais de curvatura constant. Amb tot, per raó de les comprovacions efectuades per l'astronomia i per la mecànica, s'havia arribat a la conclusió de què, si és que l'espai físic és de curvatura constant, no nul·la, la diferència amb un espai euclidi (curvatura rigorosament nul·la) deuria ésser tan petita que escapava a les més fines observacions. Així, semblava vençuda l'eventualitat d'haver de recórrer a un més complicat esquema geomètric, reforçant-se la hipòtesis (volem dir el *sentiment*) que el nostre espai és rigorosament euclidi.

Però també aquest últim credo científic havia d'ésser sacrificat per a encabir, en una concepció unitària, espai, temps i gravitació. A tant arriba la relativitat general d'Einstein. Resumir, encara que en la forma més sumària, son contingut específic, no és possible sense una preparació adequada. Relegant al lector, desitjós d'assolir una idea d'aquesta radical transformació de la filosofia natural, a qualsevol de les exposicions de conjunt fins ara publicades[1], em limitaré aquí a referir el que sigui estrictament necessari per a compendre la gènesi de les fórmules en què es compendien les conseqüències òptiques de primera aproximació.

11. *Modificacions de l'espai. — Influència en la marxa dels raigs lluminosos. — Fórmula final.* — A la incondicionada validesa de la Geometria euclídia, es substitueix, segons Einstein, la hipòtesi, ja assolida en abstracte per Riemann i per Clifford, que també la naturalesa mètrica de l'espai (que s'exterioritza en les relacions

1. Cfr. en particular a A. EINSTEIN, *Uber die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*. Braunschweig, Vieweg (3.ª ed.), 1920. — A. S. EDDINGTON, *Space, time, gravitation*. Cambridge University Press 1920. A qui vulgui profunditzar, donant-se també compte del desenrotllament matemàtic, són especialment recomanables les lliçons de H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*. Berlin, Springer (3.ª ed.), 1920, o les de R. MARCOLONGO, *Relatività*. Messina, Principato, 1921.

entre els diversos elements d'una figura general) pot dependre dels fenòmens que s'hi desenrotllen; en particular per la presència i pel moviment de la matèria.

La hipòtesi mateixa es complica amb la ja postulada fusió de les mesures de l'espai i del temps, i es concreta en un sistema d'equacions diferencials que presideixen aquestes deformacions espaials i temporals. Ja es comprèn que es tracta de deformacions petitíssimes, les quals no s'adverteixen en els fenòmens, que ja són suficientment representats *grosso modo* amb les teories ordinàries; mes en alguns, encara que pocs casos, se'n poden treure conseqüències experimentals apreciables. Entre aquestes, celebèrrima, l'explicació del desplaçament secular del periheli de Mercuri, davant del qual havien quedat estèrils tots els esforços de la mecànica celeste, que, en canvi, és suficient per a donar compte de particularitats encara més petites dels moviments planetaris.

Ara bé : la curvatura dels raigs lluminosos en un camp de forces, ja sabem pel precedent capítol II, que en quant al fet qualitatiu, no és una prerogativa de la teoria d'Einstein. Conservant en tot l'esquema clàssic, amb la sola hipòtesi addicional que l'energia i la matèria són manifestacions diverses solament per graus d'una mateixa entitat física pot deduir-se una explicació del fenomen. El desenrotllament matemàtic de tal premissa porta, com ja hem vist, a la fórmula de variacions (9) per definir en general la marxa dels raigs, i en particular [fórmula (8)] al valor numèric 0''88 per la deflexió que deuria ésser causada pel Sol sobre els raigs estelars que passen arran de la corona.

¿Quina conclusió dóna, fets els càlculs, la teoria d'Einstein, quan se l'aplica a preveure l'efecte de massa material sobre la propagació de la llum?

Ella implica, en primer lloc (és una de les seves bases, com hem dit), canvi de la naturalesa mètrica de l'espai ambient, el qual no roman ja més euclidi, sinó que es recorba, com (descendint de tres a dues dimensions per tenir una analogia representable) s'esdevé a una superfície plana, membrana o planxa elàstica fixada en la vora quan és oprimida, p. e., en la part central.

Per altra banda, la mateixa teoria (limitant-se per simplicitat a la primera aproximació) porta a reconèixer que és suficient sobreposar la deformació de l'espai a la curvatura directa pròpia dels raigs, ja calculada per via energètica i representada per la (9).

En definitiva, *les coses s'esdevenen com si l'espai ambient* (que en realitat, o si volem ésser agnòstics, segons la concepció einsteniana, s'és recorbat) *romangués rigorosament euclidi i els raigs fossin definits pel principi de variació* (1)

$$\delta \int \sqrt{1 + \frac{4U}{c^2}}\, ds = 0 \tag{10}$$

representant U *el potencial newtonià de les masses que es prenen en consideració.*

La comparació amb la (9) demostra que hi ha una sola diferència : el factor 4, en lloc de 2, coeficient de U. Es pot, doncs, inferir que, *segons la teoria de la relativitat general* (limitada a la primera aproximació, o sia retenint despreciables els termes de segon ordre en $\frac{U}{c^2}$), *els raigs lluminosos dintre d'un camp de forces de potencial* U *s'identifiquen amb un feix de trajectòries dinàmiques,*

1. Per a la demostració vegin-se les notes de T. Levi-Civita «*Statica einsteniana*» Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVI (1.r semestre 1917), pàgs. 459-470, i ds² *einsteiniani in campi newtoniani* I. : *Generalità e prima approssimazione, ibidem* (2.a semestre 1917), pàgs. 307-317.

corresponents, però, al potencial doble : 2U. *La constant de les forces vives característica del feix és* $\frac{1}{2}c^2$ (això com en la teoria ordinària a la qual s'associï el postulat de proporcionalitat).

La substitució de 2U a U, en l'equació comprensiva que defineix els raigs, porta naturalment la mateixa substitució en les equacions que s'obtenen. Referint-nos en particular al cas de l'atracció solar, discutit en el capítol II, pel qual $U = \frac{fM}{r}$ (r distància del centre del Sol), bastarà materialment duplicar el coeficient fM en les diverses fórmules.

Resulta llavors, de les (7) i (8), que la *deflexió* (dels raigs que provenen d'una estrella i passen arran de la corona solar) *prevista per la teoria d'Einstein, és doble de la calculada amb els criteris ordinaris fonamentats en la simple proporcionalitat entre l'energia i massa material, i val:*

$$1''76 \quad .$$

És aquest un ordre de magnitud perfectament accessible a observacions astronòmiques afinades.

Noti's que per a Júpiter, l'efecte anàleg, també en condicions de màxim, amb prou feines si arriba a 0''017, romanent, per tant, inapreciable.

12. *Confirmació experimental.* — Els eventuals desplaçaments angulars deguts al Sol són efectivament observables durant un eclipse total del mateix. Teòricament bastaria escollir una estrella fixa qualsevol, el raig visual de la qual passi arran del Sol en el moment de l'eclipse, i comparar la posició observada en tal ocasió amb la que

es treu dels catàlegs. En la pràctica, donada la limitada precisió dels catàlegs, que poden deixar incertituds de l'ordre de 1", es recorre a la confrontació de plaques fotogràfiques (de regions del cel pròximes a la corona solar) obtingudes durant l'eclipse i en condicions normals.

Una primera temptativa en aquest sentit fou promoguda per l'Observatori de Lick, en 1918; però la precisió de les observacions va resultar insuficient per al fi proposat.

A l'eclipse total del 29 de maig de 1919, dues expedicions simultànies, foren organitzades per la Reial Societat de Londres : l'una treballà a Sobral, en el Brasil septentrional, i l'altra a la illa del Príncipe, en el golf de Guinea, essent les dues localitats compreses en la zona de totalitat de l'eclipse. Els resultats de les observacions recollides en aquestes dues expedicions es pot resumir així [1] : Les mitjanes dels desplaçaments observats a Sobral donen per la deflexió 1"98 (amb error probable de ± 0"12); la mitjana anàloga de les observacions a Príncipe dóna 1"61 (amb error probable de ± 0"30). Entre els dos valors experimentals hi ha la deflexió 1"76, prevista per la relativitat general d'Einstein. Aquesta ha rebut amb això una nova i renombrada confirmació, romanent clarament excloses, sia la desviació nul·la de l'Òptica geomètrica, sia la desviació mitjana (0"88) que dóna la teoria ordinària, associant-li el sol postulat de proporcionalitat entre la massa i l'energia.

1. F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson : *A Determination of the Deflection of Light by the Sun's gravitational Field*, from observations made at the Total Eclipse of May 29th 1919. Philos. Transactions of the Royal Society of London, S. A.; vol. 220 (1920), pàgs. 291-333.